

Ⅰ 수와 연산

※ 제곱근의 뜻과 표현

(1) 제곱근 : 어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, x를 a의 제곱근이라고 한다. 즉, $x^2=a$일 때, x는 a의 제곱근이다.

예 $4^2=16$, $(-4)^2=16$이므로 4와 -4는 16의 제곱근이다.

(2) 제곱근의 개수

① 양수의 제곱근은 양수와 음수의 2개이고, 이 두 수의 절댓값은 서로 같다.

② 0의 제곱근은 0 하나뿐이다.

③ 음수의 제곱근은 없다.

(3) 제곱근의 표현

① 양수 a의 제곱근 중에서 양의 제곱근을 $\sqrt{a}$, 음의 제곱근을 $-\sqrt{a}$로 나타낸다.

② 양수 a에 대하여 $\sqrt{a}$와 $-\sqrt{a}$를 함께 $\pm\sqrt{a}$로 나타내기도 한다.

※ 제곱근의 성질과 대소 관계

(1) 제곱근의 성질 : $a>0$일 때

① $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$

② $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$

(2) 제곱근의 대소 관계 : $a>0$, $b>0$일 때

① $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$

② $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$

※ 무리수와 실수

(1) 무리수 : 유리수가 아닌 수, 즉 순환하지 않는 무한소수

(2) 실수 : 유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 한다.

※ 실수와 수직선

(1) 유리수와 수직선 : 서로 다른 두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

(2) 무리수와 수직선 : 서로 다른 두 무리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

(3) 실수와 수직선 : 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점들로 완전히 메워져 있다.

※ 실수의 대소 관계

두 실수 a, b에 대하여

(1) $a-b>0$이면 $a>b$

(2) $a-b=0$이면 $a=b$

(3) $a-b<0$이면 $a<b$

※ 제곱근의 곱셈과 나눗셈

$a>0$, $b>0$이고, m, n이 유리수일 때

(1) 제곱근의 곱셈

① $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $m\sqrt{a}\times n\sqrt{b}=mn\sqrt{ab}$

(2) 제곱근의 나눗셈

① $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

② $m\sqrt{a}\div n\sqrt{b}=\dfrac{m}{n}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

※ 근호가 있는 식의 변형

$a>0$, $b>0$일 때

$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$, $\sqrt{\dfrac{a}{b^2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$

※ 분모의 유리화

(1) 분모의 유리화 : 분모에 근호가 있을 때, 분모, 분자에 0이 아닌 수를 곱하여 분모의 근호를 없애고 분모를 유리수로 고치는 것

$a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$

※ 제곱근의 덧셈과 뺄셈

근호 안의 수가 같을 때, 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈은 다항식에서 동류항의 덧셈과 뺄셈을 하는 것과 같은 방법으로 계산한다.

m, n이 유리수이고, $a>0$일 때

(1) 덧셈 : $m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}$

(2) 뺄셈 : $m\sqrt{a}-n\sqrt{a}=(m-n)\sqrt{a}$

※ 근호가 있는 복잡한 식의 계산

(1) 괄호가 있으면 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼다.

(2) 근호 안에 제곱인 인수가 있으면 제곱근의 성질 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$를 이용한다.

(3) 분모에 무리수가 있으면 분모를 유리화한다.

(4) 곱셈, 나눗셈을 먼저 계산한 후 근호 안의 수가 같은 것끼리 모아 덧셈, 뺄셈을 한다.

※ 제곱근의 근삿값

(1) 제곱근표 : 1.00부터 99.9 사이에 있는 수의 양의 제곱근의 근삿값을 소수점 아래 셋째 자리까지 계산해 놓은 표

(2) 제곱근표를 읽는 방법 : 제곱근표를 이용하여 제곱근의 근삿값을 구할 때에는 제곱근표에서 처음 두 자리 수의 가로줄과 끝자리 수의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수를 찾는다.

(3) 제곱근표에 없는 수의 근삿값

① 100보다 큰 수의 제곱근의 근삿값 : $\sqrt{100a}=10\sqrt{a}$, $\sqrt{10000a}=100\sqrt{a}$, …

② 1보다 작은 수의 제곱근의 근삿값 : $\sqrt{\dfrac{a}{100}}=\dfrac{\sqrt{a}}{10}$, $\sqrt{\dfrac{a}{10000}}=\dfrac{\sqrt{a}}{100}$, …

예 $\sqrt{3}\fallingdotseq1.732$일 때,

① $\sqrt{300}=\sqrt{100\times3}=10\sqrt{3}\fallingdotseq10\times1.732=17.32$

② $\sqrt{0.03}=\sqrt{\dfrac{3}{100}}=\dfrac{\sqrt{3}}{10}\fallingdotseq\dfrac{1.732}{10}=0.1732$

Ⅱ 식의 계산

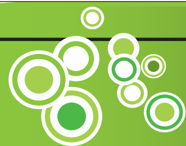
※ 인수분해

(1) 인수분해 : 하나의 다항식을 두 개 이상의 단항식이나 다항식의 곱으로 나타내는 것

$$x^2+4x+3 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x+3)$$

(2) 인수 : 다항식을 인수분해하였을 때, 곱해진 각각의 식

(3) 공통인수 : 다항식의 각 항에 공통으로 들어 있는 인수



※ 인수분해 공식

(1) 완전제곱식을 이용한 인수분해

① 완전제곱식 : 다항식의 제곱으로 된 식 또는 여기에 상수를 곱한 식

예 $(a+b)^2$, $(x+2)^2$, $2(x-3)^2$

② 완전제곱식을 이용한 인수분해

• $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

• $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(2) 합 · 차의 곱을 이용한 인수분해

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

※ 인수분해 공식

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ ─ 완전제곱식

(2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ - 합차 공식

(3) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(4) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

※ 인수분해 공식의 활용

(1) 복잡한 식의 인수분해

① 공통인수가 있으면 공통인수로 묶어낸다.

② 공통인 식이 있으면 한 문자로 치환한다.

③ 항이 여러 개인 경우 적당한 항끼리 묶는다.

④ 문자가 여러 개인 경우 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(2) 수의 계산 : 인수분해 공식을 이용하여 수를 계산하면 편리하다.

(3) 식의 값 : 주어진 식을 인수분해한 후, 문자의 값을 대입하여 식의 값을 구한다.

3 문학의 아름다움과 가치

※ 이차방정식

(1) x에 관한 이차방정식 : 방정식의 우변의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때, (x에 관한 이차식)$=0$의 꼴로 변형되는 방정식

(2) 이차방정식의 일반형 : x에 관한 이차방정식은 $ax^2+bx+c=0$(단, $a\neq0$, a, b, c는 상수)와 같이 나타낸다.

※ 이차방정식의 해(근)

(1) 이차방정식의 해 : 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$을 참이 되게 하는 미지수 x의 값을 이차방정식의 '해' 또는 '근'이라고 한다.

예 $x=-1$을 이차방정식 $x^2+2x+1=0$에 대입하면 $(-1)^2+2\times(-1)+1=0$(참)이므로 $x=-1$은 $x^2+2x+1=0$의 해이다.

(2) 이차방정식을 푼다 : 이차방정식의 해를 모두 구하는 것

※ 이차방정식의 풀이

(1) $AB=0$: 두 식 A, B에 대하여 $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$이다.

(2) 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

① 이차방정식을 정리한다. : $ax^2+bx+c=0$

② 좌변을 인수분해한다. : $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

③ $AB=0$의 성질을 이용하여 해를 구한다. : $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

(3) 이차방정식의 중근

① 중근 : 이차방정식의 두 근이 중복되어 서로 같을 때, 이 근을 중근이라고 한다.

② 중근을 가질 조건 : 이차방정식이 (완전제곱식)$=0$의 꼴로 인수분해된다.

(4) 제곱근의 성질을 이용한 이차방정식의 풀이

① 이차방정식 $x^2=k(k\geq0)$의 해 : $x=\pm\sqrt{k}$

② 이차방정식 $(x-p)^2=q(q\geq0)$의 해 : $x-p=\pm\sqrt{q}$ $\Rightarrow$ $x=p\pm\sqrt{q}$

(5) 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 좌변이 인수분해되지 않을 때, 이차방정식을 $(x-p)^2=q$의 꼴로 고쳐 제곱근의 성질을 이용하여 푼다.

① 이차항의 계수를 1로 만든다.

② 상수항을 우변으로 이항한다.

③ 양변에 $\left(\frac{x\text{의 계수}}{2}\right)^2$을 더한다.

④ 좌변을 완전제곱식으로 정리한다.

⑤ 제곱근의 성질을 이용하여 해를 구한다.

※ 이차방정식의 근의 공식

(1) 이차방정식의 근의 공식

① x에 관한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 해는

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\geq0$)

② x의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0(a\neq0)$의 해는 $x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ (단, $b'^2-ac\geq0$)

(2) 복잡한 이차방정식의 풀이

① 계수가 소수일 때는 양변에 10의 거듭제곱을 곱하여 계수를 정수로 고친다.

② 계수가 분수일 때는 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 계수를 정수로 고친다.

※ 이차방정식의 활용

(1) 근의 개수 : 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$에서

① $b^2-4ac>0$이면 서로 다른 두 개의 근을 갖는다.

② $b^2-4ac=0$이면 한 개의 근(중근)을 갖는다.

③ $b^2-4ac<0$이면 근이 없다.

(2) 근과 계수와의 관계 : 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 두 근을 α, β라 하면

① 두 근의 합 : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ② 두 근의 곱 : $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

(3) 이차방정식 구하기

① 두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$(단, $a\neq0$)

② $x=\alpha$를 중근으로 갖고, x^2의 계수가 a인 이차방정식은 $a(x-\alpha)^2=0$

(4) 이차방정식의 활용 문제 풀이 순서

미지수 정하기 ➡ 이차방정식 세우기 ➡ 이차방정식 풀기 ➡ 문제에 맞는 답 고르기



Ⅳ 이차함수

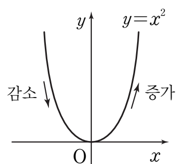
※ 이차함수와 그 그래프

(1) 이차함수의 뜻 : 실수의 집합을 각각 정의역과 공역으로 하는 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 이차식

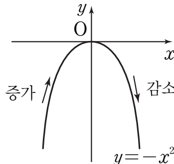
$$y=ax^2+bx+c\ (a,\ b,\ c\text{는 상수},\ a\neq0)$$

로 나타내어질 때, 이 함수 f를 x에 관한 이차함수라고 한다.

(2) 이차함수 $y=x^2$의 그래프

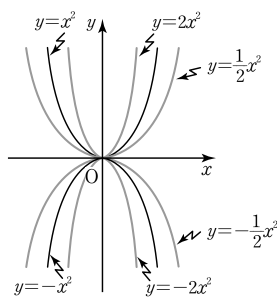


(3) 이차함수 $y=-x^2$의 그래프



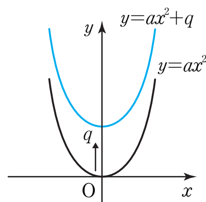
※ 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

(1) 원점 O를 꼭짓점으로 한다.
(2) y축에 대하여 대칭이다.
즉, 축의 방정식은 $x=0$이다.
(3) a의 부호
① $a>0$일 때, 아래로 볼록하다.
② $a<0$일 때, 위로 볼록하다.
(4) a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.
(5) $y=ax^2$의 그래프와 $y=-ax^2$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

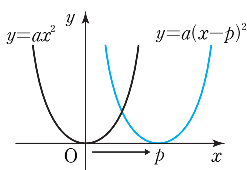


※ 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

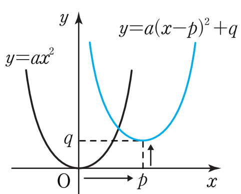
(1) 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프
① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프이다.
② 꼭짓점의 좌표 : $(0,\ q)$
③ 축의 방정식 : $x=0$ (y축)



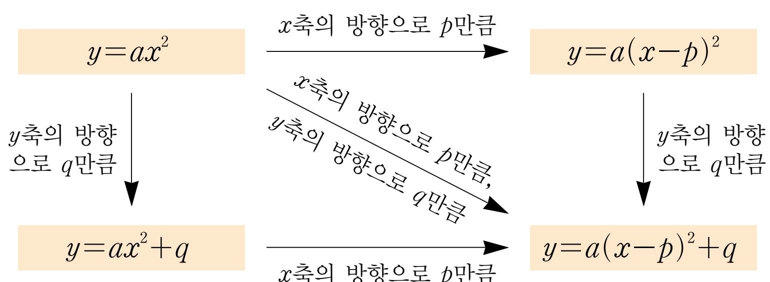
(2) 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프
① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프이다.
② 꼭짓점의 좌표 : $(p,\ 0)$
③ 축의 방정식 : $x=p$



(3) 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프
① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프이다.
② 꼭짓점의 좌표 : $(p,\ q)$
③ 축의 방정식 : $x=p$



※ 이차함수의 평행이동



※ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프
① 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 그린다.

즉, $y=ax^2+bx+c \Rightarrow y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

② 꼭짓점의 좌표 : $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$
③ 축의 방정식 : $x=-\dfrac{b}{2a}$
④ y축과의 교점의 좌표 : $(0,\ c)$

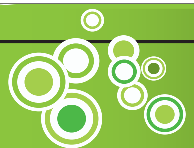
(2) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 $a,\ b,\ c$의 부호
① a의 부호 : 그래프의 모양에 따라 결정
• 포물선이 아래로 볼록 $\Rightarrow a>0$
• 포물선이 위로 볼록 $\Rightarrow a<0$
② b의 부호 : 축의 위치에 따라 결정
• 축이 y축의 왼쪽에 위치 $\Rightarrow a,\ b$는 서로 같은 부호
• 축이 y축의 오른쪽에 위치 $\Rightarrow a,\ b$는 서로 다른 부호
• 축이 y축과 일치 $\Rightarrow b=0$
③ c의 부호 : y절편의 부호
• y절편이 양수 $\Rightarrow c>0$
• y절편이 음수 $\Rightarrow c<0$
• y절편이 0 $\Rightarrow c=0$

(3) 이차함수의 식 구하기
① 꼭짓점의 좌표 $(p,\ q)$와 그래프 위의 한 점을 알 때 : $y=a(x-p)^2+q$에 주어진 한 점의 좌표를 대입하여 a의 값을 구한다.
② 축의 방정식 $x=p$와 그래프 위의 두 점을 알 때 : $y=a(x-p)^2+q$에 주어진 두 점의 좌표를 대입하여 $a,\ q$의 값을 구한다.
③ 그래프 위의 서로 다른 세 점을 알 때 : $y=ax^2+bx+c$에 주어진 세 점의 좌표를 대입하여 $a,\ b,\ c$의 값을 구한다.
④ x축과의 교점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$과 다른 한 점을 알 때 : $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$에 주어진 한 점의 좌표를 대입하여 a의 값을 구한다.

※ 이차함수의 최댓값과 최솟값

(1) 함수의 최댓값과 최솟값
① 최댓값 : 함수의 정의역의 각 원소에 대응하는 함숫값 중 가장 큰 값
② 최솟값 : 함수의 정의역의 각 원소에 대응하는 함숫값 중 가장 작은 값

(2) 이차함수의 최댓값과 최솟값
이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳤을 때
① $a>0$일 때
• $x=p$에서 최솟값 q를 가진다.
• 최댓값은 없다.
• 치역은 $\{y\,|\,y\geq q\}$이다.
② $a<0$일 때
• $x=p$에서 최댓값 q를 가진다.
• 최솟값은 없다.
• 치역은 $\{y\,|\,y\leq q\}$이다.



※ 이차함수의 활용 문제

(1) 이차함수의 활용 문제 풀이 순서
① 문제의 뜻을 파악하고 두 변수 x, y를 정한다.
② 변수 x, y 사이의 관계를 식으로 나타내고, x의 값의 범위를 정한다.
③ 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.
④ 구한 답이 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

Ⅴ 통계

※ 대푯값

(1) 대푯값 : 자료 전체의 특징을 대표하는 값으로 평균, 중앙값, 최빈값 등이 있으며 평균이 주로 사용된다.
(2) 대푯값의 종류
① 평균 : 변량의 총합을 변량의 개수로 나눈 값
즉, $(\text{평균})=\dfrac{(\text{변량})\text{의 총합}}{(\text{변량})\text{의 개수}}$
② 중앙값 : 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 중앙에 오는 값
㉠ 자료의 개수 n이 홀수일 때 : $\dfrac{n+1}{2}$번째 자료의 값
㉡ 자료의 개수 n이 짝수일 때 : $\dfrac{n}{2}$번째와 $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$번째 자료의 값의 평균
③ 최빈값 : 자료의 값 중에서 가장 많이 나타나는 값
㉠ 자료의 값 중에서 도수가 가장 큰 값이 한 개 이상 있으면 그 값이 모두 최빈값이다.
㉡ 각 자료의 값의 도수가 모두 같으면 최빈값은 없다.

※ 산포도

(1) 산포도 : 대푯값을 중심으로 자료가 흩어져 있는 정도를 하나의 수로 나타낸 값
(2) 편차 : 어떤 자료의 각 변량에서 평균을 뺀 값
즉, $(\text{편차})=(\text{변량})-(\text{평균})$
(3) 편차의 성질
① 편차의 총합은 항상 0이다.
② 평균보다 큰 변량의 편차는 양수이고, 평균보다 작은 변량의 편차는 음수이다.

※ 분산과 표준편차

(1) 분산 : 편차의 제곱의 평균
즉, $(\text{분산})=\dfrac{(\text{편차})^2\text{의 총합}}{(\text{변량})\text{의 개수}}$
(2) 표준편차 : 분산의 양의 제곱근, 즉 $(\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}$

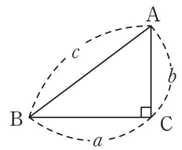
※ 도수분포표에서의 분산과 표준편차

(1) $(\text{편차})=(\text{계급값})-(\text{평균})$
(2) $(\text{분산})=\dfrac{\{(\text{편차})^2\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수})\text{의 총합}}$
(3) $(\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}$

Ⅵ 피타고라스의 정리

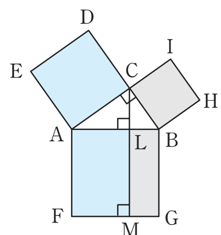
※ 피타고라스의 정리

(1) 피타고라스의 정리 : 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라 할 때, $a^2+b^2=c^2$이 성립한다.

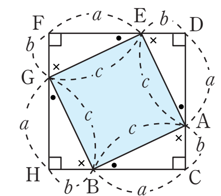


참고 직각삼각형의 변의 길이 : 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때, 피타고라스의 정리를 이용하면 나머지 한 변의 길이를 알 수 있다.
• $a=\sqrt{c^2-b^2}$
• $b=\sqrt{c^2-a^2}$
• $c=\sqrt{a^2+b^2}$

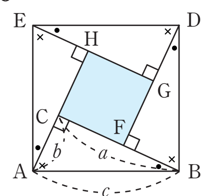
(2) 피타고라스의 정리의 증명 ❶ – 유클리드의 증명
□ACDE=□AFML,
□BHIC=□LMGB이므로
□ACDE+□BHIC=□AFGB
⇒ $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$



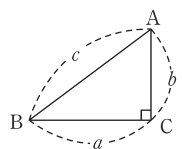
(3) 피타고라스의 정리의 증명 ❷ – 피타고라스의 정리
① △ABC≡△EAD≡△GEF
≡△BGH(SAS 합동)
② □CDFH, □AEGB는 정사각형
③ □CDFH=4△ABC+□AEGB이므로
$(a+b)^2=4\times\dfrac{1}{2}ab+c^2$ ∴ $a^2+b^2=c^2$



(4) 피타고라스의 정리의 증명 ❸ – 바스카라의 증명
① △ABC≡△BDF≡△DEG≡△EAH
② □ABDE, □CFGH는 정사각형
③ □ABDE=4△ABC+□CFGH이므로
$c^2=4\times\dfrac{1}{2}ab+(a-b)^2$ ∴ $a^2+b^2=c^2$

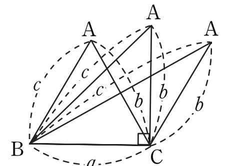


(5) 피타고라스의 정리의 역 : 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 △ABC에서 $a^2+b^2=c^2$이면 ∠C=90°
즉, △ABC는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.



※ 삼각형의 각과 변 사이의 관계

(1) 삼각형의 각의 크기에 대한 변의 길이
△ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 할 때
① ∠C<90° 이면 $c^2<a^2+b^2$
② ∠C=90° 이면 $c^2=a^2+b^2$
③ ∠C>90° 이면 $c^2>a^2+b^2$



(2) 삼각형의 변의 길이에 대한 각의 크기
△ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$일 때
(단, $\overline{AB}$는 가장 긴 변)
① $c^2<a^2+b^2$이면 ∠C<90° 인 예각삼각형이다.
② $c^2=a^2+b^2$이면 ∠C=90° 인 직각삼각형이다.
③ $c^2>a^2+b^2$이면 ∠C>90° 인 둔각삼각형이다.

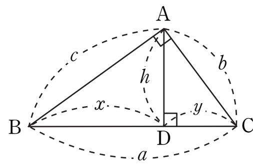




※ 피타고라스의 정리의 이용

(1) 직각삼각형의 닮음을 이용한 성질

$\triangle ABC$에서 $\angle A=90^\circ$이고 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$일 때



① 피타고라스의 정리 : $a^2=b^2+c^2$

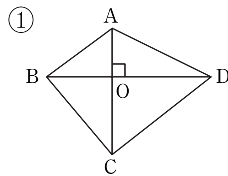
② 닮음 관계 : $c^2=ax$, $b^2=ay$, $h^2=xy$

③ 넓이 관계 : $bc=ah$

(2) 사각형에서 피타고라스의 정리의 이용

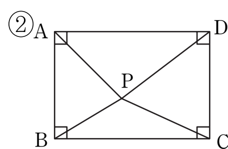
① □ABCD에서 두 대각선이 서로 직교하면

$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$

①


② 직사각형 ABCD의 내부에 임의의 한 점 P가 있을 때

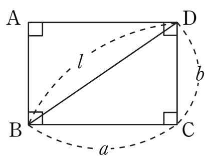
$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$

②


※ 평면도형에서의 활용

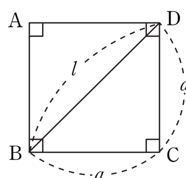
(1) 직사각형의 대각선의 길이 : 가로와 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 대각선의 길이를 l이라 하면

$$l=\sqrt{a^2+b^2}$$



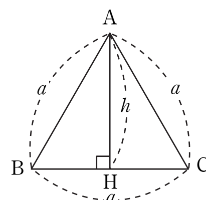
(2) 정사각형의 대각선의 길이 : 한 변의 길이가 a인 정사각형의 대각선의 길이를 l이라 하면

$$l=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$$



(3) 정삼각형의 높이와 넓이 : 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이를 h, 넓이를 S라 하면

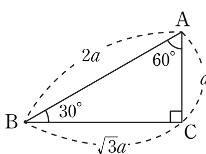
$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



(4) 특수한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비

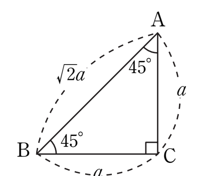
① 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 직각삼각형에서 세 변의 길이의 비

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=2:\sqrt{3}:1$



② 세 내각의 크기가 45°, 45°, 90°인 직각삼각형에서 세 변의 길이의 비

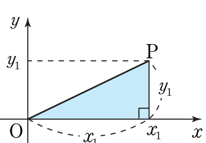
$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=\sqrt{2}:1:1$



(5) 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

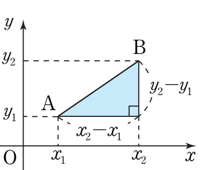
① 좌표평면 위의 원점 O와 한 점 $P(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OP}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$$



② 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

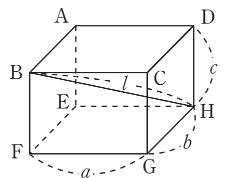
$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



※ 입체도형에서의 활용

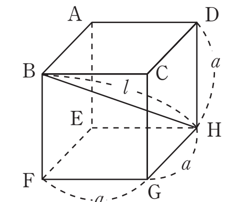
(1) 직육면체의 대각선의 길이 : 세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이를 l이라 하면

$$l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$



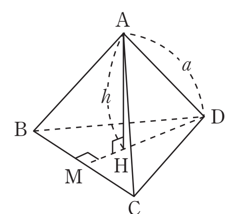
(2) 정육면체의 대각선의 길이 : 한 모서리의 길이가 a인 정육면체의 대각선의 길이를 l이라 하면

$$l=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a$$



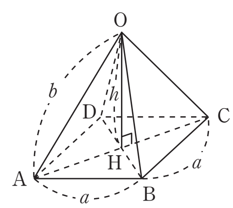
(3) 정사면체의 높이와 부피 : 한 모서리의 길이가 a인 정사면체의 높이를 h, 부피를 V라 하면

$$h=\frac{\sqrt{6}}{3}a,\quad V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$



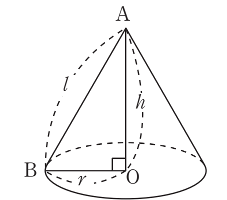
(4) 정사각뿔의 높이와 부피 : 밑면의 한 변의 길이가 a이고, 옆면의 모서리의 길이가 b인 정사각뿔의 높이를 h, 부피를 V라 하면

$$h=\sqrt{b^2-\frac{1}{2}a^2},\quad V=\frac{1}{3}a^2h$$



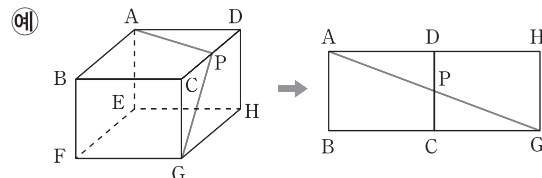
(5) 원뿔의 높이와 부피 : 밑면인 원의 반지름의 길이가 r, 모선의 길이가 l인 원뿔의 높이를 h, 부피를 V라 하면

$$h=\sqrt{l^2-r^2},\quad V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$



(6) 입체도형에서의 최단 거리 : 입체도형의 겉면 위의 두 점 사이의 최단 거리는 전개도에서 두 점을 잇는 선분의 길이와 같다.

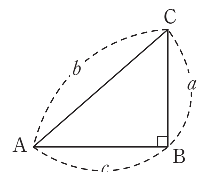
예



Ⅶ 삼각비

※ 삼각비

(1) 삼각비 : $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 하면



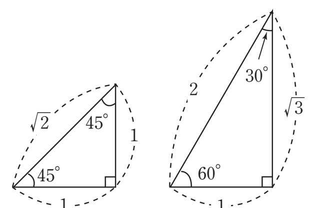
① $\sin A=\dfrac{(\text{높이})}{(\text{빗변의 길이})}=\dfrac{a}{b}$

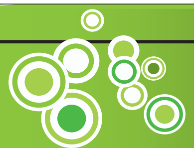
② $\cos A=\dfrac{(\text{밑변의 길이})}{(\text{빗변의 길이})}=\dfrac{c}{b}$

③ $\tan A=\dfrac{(\text{높이})}{(\text{밑변의 길이})}=\dfrac{a}{c}$

(2) 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값

A / 삼각비	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$





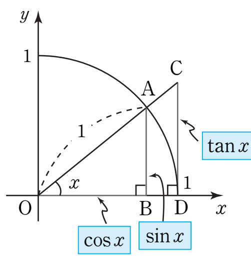
삼각비의 값

(1) 예각의 삼각비 : 반지름의 길이가 1인 사분원에서 임의의 예각을 x라 하면

① $\sin x=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$

② $\cos x=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OB}}{1}=\overline{OB}$

③ $\tan x=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\dfrac{\overline{CD}}{1}=\overline{CD}$



(2) 0°, 90° 의 삼각비의 값

삼각비 / x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0°	0	1	0
90°	1	0	정할 수 없다.

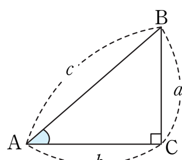
(3) 삼각비의 표를 이용하여 삼각비의 값 구하기 : $0° \le x \le 90°$ 인 삼각비를 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하여 얻은 근삿값으로 가로줄과 세로줄이 만나는 곳의 수가 삼각비의 근삿값이다.

각도	sin	cos	tan
⋮	⋮	⋮	⋮
12°	0.2079	0.9781	0.2126

삼각비의 활용

(1) 직각삼각형에서 변의 길이 구하기

$\angle C=90°$ 인 직각삼각형 ABC에서



① $\angle A$의 크기와 빗변의 길이 c를 알 때

$a=c\sin A,\quad b=c\cos A$

② $\angle A$의 크기와 밑변의 길이 b를 알 때

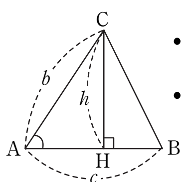
$a=b\tan A,\quad c=\dfrac{b}{\cos A}$

③ $\angle A$의 크기와 높이 a를 알 때

$b=\dfrac{a}{\tan A},\ c=\dfrac{a}{\sin A}$

(2) 삼각형의 넓이 : △ABC에서 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기를 알면 삼각형의 넓이 S를 구할 수 있다.

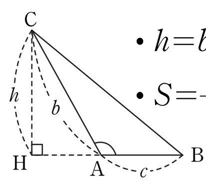
① $\angle A$가 예각인 경우



• $h=b\sin A$

• $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

② $\angle A$가 둔각인 경우

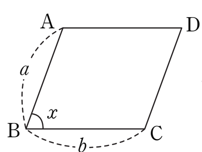


• $h=b\sin(180°-A)$

• $S=\dfrac{1}{2}bc\sin(180°-A)$

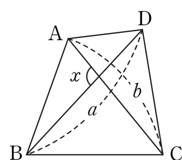
(3) 사각형의 넓이

① 평행사변형 넓이



$S=ab\sin x$

② 사각형의 넓이



$S=\dfrac{1}{2}ab\sin x$

Ⅷ 원과 직선

원과 직선

(1) 중심각에 대한 호와 현 : 한 원 또는 합동인 두 원에서

① 크기가 같은 두 중심각에 대한 호의 길이와 현의 길이는 각각 같다.

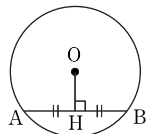
② 길이가 같은 두 호 또는 두 현에 대한 중심각의 크기는 같다.

(2) 현의 수직이등분선

① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분한다.

⇒ $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이면 $\overline{AH}=\overline{BH}$

② 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.



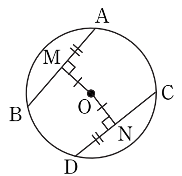
(3) 현의 길이 : 한 원 또는 합동인 두 원에서

① 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.

⇒ $\overline{OM}=\overline{ON}$이면 $\overline{AB}=\overline{CD}$

② 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

⇒ $\overline{AB}=\overline{CD}$이면 $\overline{OM}=\overline{ON}$

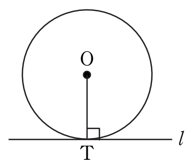


(4) 원의 접선과 반지름

① 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름에 수직이다.

⇒ $\overline{OT}\perp l$

② 원 위의 한 점을 지나고, 그 점을 지나는 반지름에 수직인 직선은 이 원의 접선이다.

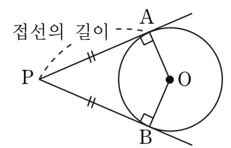


(5) 원의 접선

① 접선의 길이 : 원 밖의 한 점 P에서 원 O에 접선을 그을 때, 점 P에서 접점에 이르는 거리

② 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

⇒ $\overline{PA}=\overline{PB}$

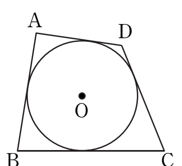


(6) 원의 외접사각형의 성질

① 원에 외접하는 사각형의 두 쌍의 대변의 길이의 합은 같다.

⇒ $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

② 두 쌍의 대변의 길이의 합이 서로 같은 사각형은 원에 외접한다.



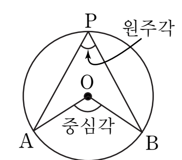
원주각

(1) 원주각과 중심각의 크기

① 원 O에서 호 AB를 제외한 원 위에 한 점 P가 있을 때, $\angle APB$를 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각이라고 한다.

② 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$이다.

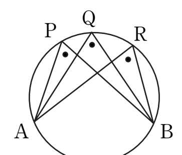
⇒ $\angle APB=\dfrac{1}{2}\angle AOB$



(2) 원주각의 성질

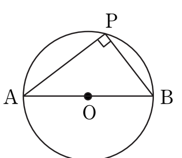
① 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

⇒ $\angle APB=\angle AQB=\angle ARB$



② 반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이다.

⇒ $\overline{AB}$가 원 O의 지름이면 $\angle APB=90°$





(3) 원주각의 크기와 호의 길이

한 원 또는 합동인 두 원에서

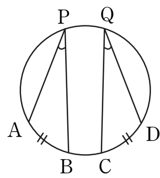
① 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

⇒ $\widehat{AB}=\widehat{CD}$이면 $\angle APB=\angle CQD$

② 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이는 같다.

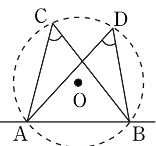
⇒ $\angle APB=\angle CQD$이면 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$

③ 원주각의 크기와 호의 길이는 정비례한다.



(4) 네 점이 한 원 위에 있을 조건 – 원주각

두 점 C, D가 직선 AB에 대하여 같은 쪽에 있고 $\angle ACB=\angle ADB$이면 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

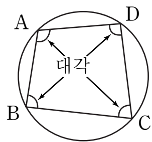


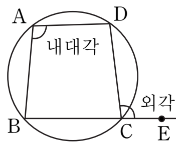
⊠ 원과 사각형

(1) 원에 내접하는 사각형의 성질

① 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

⇒ $\angle A+\angle C=180^\circ$,
$\angle B+\angle D=180^\circ$





② 한 외각의 크기는 그 내대각의 크기와 같다.

⇒ $\angle DCE=\angle A$

(2) 사각형이 원에 내접하기 위한 조건

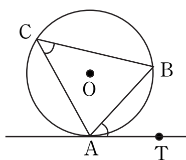
① 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°인 사각형은 원에 내접한다.

② 한 외각의 크기가 그 내대각의 크기와 같은 사각형은 원에 내접한다.

⊠ 접선과 현이 이루는 각

(1) 접선과 현이 이루는 각 : 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

⇒ $\angle BAT=\angle BCA$

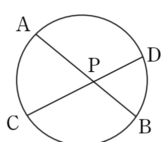


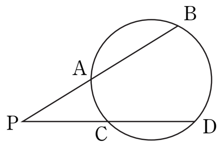
(2) 접선이 되기 위한 조건 : 원 O에서
$\angle BAT=\angle BCA$이면 직선 AT는 원 O의 접선이다.

⊠ 원과 비례

(1) 원에서의 비례 관계 : 한 원에서 두 현 AB, CD 또는 이들의 연장선이 만나는 점을 P라하면

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$



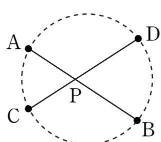


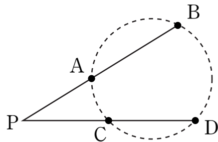
(2) 네 점이 한 원 위에 있을 조건 – 비례 관계

두 선분 AB, CD 또는 이들의 연장선이 만나는 점을 P라 할 때,

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$

이면 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.





⊠ 접선과 할선 사이의 관계

(1) 할선과 접선의 관계 : 원의 외부에 있는 한 점 P에서 이 원에 그은 접선과 할선이 원과 만나는 점을 각각 T, A, B라 하면

$\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$

(2) 접선이 되기 위한 조건 : 한 직선 위에 세 점 P, A, B가 있고, 이 직선 밖에 점 T가 있을 때, $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이면 $\overline{PT}$는 세 점 A, B, T를 지나는 원의 접선이다.

